Durée : 4 heures (Calculatrice autorisée)

Académie de Nice – Bac blanc 11 – 28 janvier 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Le candidat doit traiter les cinq exercices. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

   b. On pose $a = \sqrt{3} + \text{i}$ et $b = \sqrt{3} - \text{i}$. Écrire a et b sous forme exponentielle et placer les points A et B d'affixes a et b.

2. **a.** Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
   Calculer sous forme algébrique l'affixe a' du point A' image du point A par r puis placer A' sur la figure précédente.

   b. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $-\dfrac{3}{2}$.
   Calculer sous forme algébrique l'affixe b' du point B' image du point B par h puis placer B' sur la figure précédente.

3. Soit C le centre du cercle circonscrit au triangle O$A'B'$ et R le rayon de ce cercle. On désigne par c l'affixe du point C.

   a. Justifier les égalités suivantes :

$$c\overline{c} = R^2 \quad ; \quad (c - 2\text{i})\left(\overline{c} + 2\text{i}\right) = R^2 \quad ; \quad \left(c + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\text{i}\right)\left(\overline{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\text{i}\right) = R^2.$$

   b. En déduire que $c - \overline{c} = 2\text{i}$ puis que $c + \overline{c} = -\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

   c. En déduire l'affixe du point C et la valeur de R.

Exercice 2 **2,5 points**

1. On considère l'équation différentielle

$$(\text{E}) \qquad : \quad y' = -10y + 6.$$

   où y désigne une fonction de la variable réelle t, dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer l'existence et l'unicité de la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 0$ en exprimant $f(t)$ en fonction de t.

2. Aux bornes d'une bobine de résistance R (exprimée en ohms) et d'inductance L (exprimée en henrys), on branche, à la date $t = 0$, un générateur de force électromotrice E (exprimée en volts). L'unité de temps est la seconde. L'intensité du courant dans le circuit (exprimée en ampères) est une fonction dérivable du temps, notée i. À la date $t = 0$, l'intensité est nulle.

Au cours de l'établissement du courant, la fonction i est solution de l'équation différentielle :

$$Li' + Ri = E.$$

Valeurs numériques : dans toute la suite, on prend $R = 5$, $L = \dfrac{1}{2}$ et $E = 3$.

Déduire des questions précédentes l'expression de $i(t)$ pour tout $t \geqslant 0$.

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} i(t)$.

Exercice 3 **3,5 points**

1. **a.** Étudier les variations de la fonction f définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f(x) = x + \cos x.$$

b. En déduire le nombre de solutions dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ de l'équation $x+\cos x = 0$ et donner une valeur approchée de chacune d'elles à 10^{-2} près.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \sin x - \frac{x}{2}.$$

a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-\frac{x}{2} - 1 \leqslant g(x) \leqslant -\frac{x}{2} + 1$$

b. En déduire la limite de g en $-\infty$ puis en $+\infty$.

3. On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de g dans un repère orthonormal. Obtenir une représentation de $(\mathscr{C})$ à l'aide la calculatrice graphique ($-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ et $-2 \leqslant y \leqslant 2$).

a. Montrer que $(\mathscr{C})$ admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

b. Soit la droite $(\mathscr{D})$ d'équation

$$y = \frac{265 - 51\pi}{306}.$$

À l'aide de la calculatrice, conjecturer le rôle graphique que joue $(\mathscr{D})$ pour $(\mathscr{C})$.

c. Résoudre dans $[0\,;\,\pi[$ l'équation $g'(x) = 0$ puis en déduire si la conjecture émise ci-dessus est vérifiée.

Exercice 4 **5 points**

Soit I l'intervalle $[0\,;\,1]$. On considère la fonction f définie sur I par

$$f(x) = \frac{3x+2}{x+4}.$$

1. Étudier les variations de f et en déduire, que pour tout $x \in$ I, $f(x) \in$ I.

2. On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4} \end{array}\right.$$

Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in$ I.

On se propose d'étudier la suite (u_n) par deux méthodes différentes.

Première méthode

3. a. Représenter graphiquement f et la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormal d'unité graphique 10 cm.

   b. En utilisant le graphique précédent, placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3. Que suggère le graphique concernant le sens de variation de (u_n) et sa convergence ?

   c. Établir la relation :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}.$$

   et en déduire le sens de variation de la suite (u_n)

   d. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

   e. Prouver que la limite l de la suite (u_n) vérifie $l = f(l)$ et calculer l.

Deuxième méthode

4. a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_n = \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^{n-1}}.$$

   b. En déduire que la suite (u_n) converge et retrouver sa limite.

Exercice 4 **5 points**

1. Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que

$$\text{PGCD}(a+b\,;\ ab) = p.$$

   où p est un nombre premier.

   a. Démontrer que p divise $a2$.
   On remarquera que $a^2 = a(a+b) - ab$.

   b. En déduire que p divise a.
   On constate donc, de même, que p divise b.

   c. Démontrer que :

$$\text{PGCD}(a\,;\ b) = p.$$

2. On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leqslant b$.

   a. Résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \text{PGCD}(a\,;\ b) & = & 5 \\ \text{PPCM}(a\,;\ b) & = & 170 \end{array}\right.$$

   b. En déduire les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{lcl} \text{PGCD}(a+b\,;\ ab) & = & 5 \\ \text{PPCM}(a\,;\ b) & = & 170 \end{array}\right.$$

Exercice 5 **4 points**

Chaque question comporte quatre affirmations repérées par les lettres a., b., c. et d. Une seule d'entre elles est exacte. Vous devez indiquer laquelle. Toute réponse exacte rapporte un point, toute réponse inexacte entraîne le retrait d'un demi-point. L'annulation d'une réponse ou l'abstension ne rapportent ni ne retirent aucun point. Un total négatif est ramené à zéro. Aucune justification n'est demandée.

1. Soit $z \in \mathbb{C}*$ vérifiant $\dfrac{\overline{z}}{|z|} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$. Une forme algébrique possible de z est

- **a.** $\sqrt{3} + \text{i}$
- **b.** $\sqrt{3} + \text{i}$
- **c.** $-1 + \text{i}\sqrt{3}$
- **d.** $1 - \text{i}\sqrt{3}$

2. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + \text{i}y$ vérifiant

$$z + 1 - i| = |1 + i|$$

est :

- **a.** réduit au point d'affixe 2i
- **b.** un cercle de centre d'affixe $1 - \text{i}$
- **c.** une droite passant par l'origine O du repère quad
- **d.** un cercle passant par O.

3. Soit n un entier naturel. Le nombre $(1 + \text{i})^n$ est un imaginaire pur si et seulement si, n s'écrit sous la forme

- **a.** $2k$
- **b.** $4k$
- **c.** $4k + 2$
- **d.** $8k$

  où $k \in \mathbb{N}$.

4. Soient A et B deux points d'affixes respectives $z_{\text{A}} = \sqrt{3}$ et $z_{\text{B}} = 2\text{i}$ dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ orthonormé. L'affixe z_{C} du point C tel que ABC soit équilatéral avec $\left(\overrightarrow{\text{BA}}, \overrightarrow{\text{BC}}\right) = \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ est

- **a.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\text{i}$
- **b.** $-1 + (2\sqrt{3} - 4)\text{i}$
- **c.** $\dfrac{5}{2} + (2\sqrt{3} - 1)\text{i}$
- **d.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{5}{2}\text{i}.$

5. Soient A et B deux points d'affixes respectives $z_{\text{A}} = \sqrt{3}$ et $z_{\text{B}} = 2\text{i}$ dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ orthonormé. Le cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre [AB] passe par le point E d'affixe :

- **a.** $\dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2} + \text{i}$
- **b.** $\dfrac{\sqrt{7}}{2} - \sqrt{3} + \text{i}$
- **c.** $-\dfrac{1}{2} + \text{i}$

d. $\dfrac{11}{5}+\mathrm{i}$

6. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x+\mathrm{i}y$ vérifiant la relation :

$$\arg\left(\frac{z+1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)=\frac{\pi}{4}\quad[2\pi]$$

est contenu dans

a. une droite d'équation $x=-1$

b. une droite d'équation $y=x$

c. une droite d'équation $y=1$

d. une droite d'équation $y=-x$.