Classe : TS1 Le 20/11/2004

MATHEMATIQUES

Interrogation N°3

Calculatrice autorisée Durée : 1h

L'objet de ce problème est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

PARTIE A - Questions préliminaires

1. Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x)=e^x-x-1$.
   (a) Montrer que pour tout $x>0$, on a $g'(x)>0$. En déduire le sens de variation de g sur $[0;+\infty[$.
   (b) Calculer $g(0)$. En déduire que, pour tout $x>0$, on a $g(x)>0$.
2. Soit h la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $h(x)=(2-x)e^x-1$.
   (a) Etudier la fonction h et dresser son tableau de variations (on calculera notamment la limite de la fonction h en $+\infty$).
   (b) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution et une seule, α, et que l'on a $\alpha>1$.
   (c) Vérifier la double inégalité : $1,84<\alpha<1,85$.
   (d) Préciser, suivant les valeurs du nombre réel $x\geqslant 0$, le signe de $h(x)$.

PARTIE B - Etude de la fonction f

1. (a) Justifier que f est définie en tout point de $[0;+\infty[$.
   (b) Montrer que pour tout $x\geqslant 0$, on peut écrire : $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{1-xe^{-x}}$.
   En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; interpréter géométriquement, relativement à $\mathcal{C}$, le résultat obtenu.
   (c) Montrer que, pour tout $x\geqslant 0$, $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(e^x-x)^2}$.
   (d) Etudier la fonction f et dresser son tableau de variations.
2. (a) Montrer que, pour tout $x\geqslant 0$, $f(x)-x=\dfrac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$.
   (b) En déduire, suivant les valeurs du nombre réel $x\geqslant 0$, la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite d'équation $y=x$.

Correction de l'interrogation N°3

Exercice 1:

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$.

PARTIE A

1. Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=e^x-x-1$.
   (a) g est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $g'(x)=e^x-1$.
   Or $e^0=1$ et la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $x>0$, $g'(x)>0$, et g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
   (b) De plus $g(0)=e^0-0-1=1-1=0$ et comme g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, on a pour tout $x>0$, $g(x)>g(0)$ c'est à dire $g(x)>0$.
2. Soit h la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $h(x)=(2-x)e^x-1$.
   (a) h est dérivable sur $[0;+\infty[$
   $h'(x)=-e^x+(2-x)e^x=e^x(-1+2-x)=e^x(1-x)$
   or pour tout $x\in[0;+\infty[$, $e^x>0$, donc $h'(x)$ est du signe de $1-x$, c'est à dire $h'(x)>0$ sur $[0;1[$ et $h'(x)<0$ sur $]1;\infty[$.
   Tableau de variation de h :
   $h(0)=(2-0)e^0-1=1$
   $h(1)=(2-1)e^1-1=e-1$

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h	1	$\nearrow$	$e-1$	$\searrow$	$-\infty$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$
   (b) h est continue sur $[0;+\infty[$ car dérivable sur $[0;+\infty[$
   - sur $[0;+\infty[$, h est strictement croissante et $h(0)=1$
   donc l'équation $h(x)=0$ n'admet pas de solution sur $[0;1[$
   - sur $[1;+\infty[$, h est strictement décroissante
   de plus $h(1)=e-1>0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$
   donc l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α sur $]1;+\infty[$.
   (c) de plus $h(1,84)\simeq 0,007$ et $h(1,85)\simeq -0,046$
   donc on obtient $1,84<\alpha<1,85$
   (d) d'après les variations de h, on peut donc conclure que :
   $h(x)>0$ sur $[0;\alpha[$; $h(x)<0$ sur $]\alpha;+\infty[$; $h(x)=0$ pour $x=\alpha$

PARTIE B

1. (a) On sait que pour tout $x\in[0;+\infty[$, $g(x)\geqslant 0$, c'est à dire $e^x-x-1\geqslant 0$
   Ainsi $e^x-x\geqslant 1$ sur $[0;+\infty[$ donc f est bien définie en tout point de $[0;+\infty[$.

(b) pour $x \geqslant 0$, $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} = \dfrac{(e^x - 1)e^{-x}}{(e^x - x)e^{-x}} = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

(c) f est dérivable sur $[0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2 - x)e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \frac{h(x)}{(e^x - x)^2}$$

(d) Comme $(e^x - x)^2 > 0$ sur $[0; +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $h(x)$

c'est à dire $f'(x) > 0$ sur $[0; \alpha[$ et $f'(x) < 0$ sur $]\alpha; +\infty[$.

Tableau de variation de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-1	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	1

$$f(0) = \frac{e^0 - 1}{e^0 - 0} = -1$$

2. (a) Pour $\alpha \geqslant 0$, $f(x) - x = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} - \dfrac{xe^x - x^2}{e^x - x} = \dfrac{(1 - x)e^x + x^2 - 1}{e^x - x}$

or $(1 - x)g(x) = (1 - x)(e^x - x - 1) = (1 - x)e^x - x + x^2 - 1 + x$

$(1 - x)g(x) = (1 - x)e^x + x^2 - 1$

Donc $f(x) - x = \dfrac{(1 - x)g(x)}{e^x - x}$

(b) or $e^x - x > 0$ sur $[0; +\infty[$ et $g(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$, donc sur $]0; +\infty[$, $f(x) - x$ est du signe de $1 - x$

c'est à dire $f(x) - x > 0$ sur $[0; 1[$; $f(x) - x < 0$ sur $]1; +\infty[$; $f(x) - x = 0$ pour $x = 0$ et $x = 1$

ainsi $\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite d'équation $y = x$ sur $]0; 1[$ et en-dessous sur $]1; +\infty[$.