Classe : TS2 Devoir maison N°6 Pour le 12/11/2003

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x + 2x - 7$.

1. Etudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
3. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α telle que $0,94 < \alpha < 0,941$.
4. Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Etude d'une fonction f

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-5)(1-e^{-x})$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unité graphique 2 cm).

1. Etudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f, et vérifier que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Dresser le tableau de variation de f.
4. (a) Démontrer l'égalité $f(\alpha) = \dfrac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$.

   (b) Etudier le sens de variation de la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{(2x-5)^2}{2x-7}$ sur l'intervalle $\left]-\infty; \dfrac{5}{2}\right[$.

   En déduire, à partir de l'encadrement de α obtenu dans la partie **A.**, un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $f(\alpha)$.
5. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$, d'équation $y = 2x - 5$, est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

   Préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}$.
6. Tracer la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Partie C : Etude d'une suite de rapports de distances

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on considère les points A_n, B_n et C_n, d'abscisse n, appartenant respectivement à l'axe des abscisses, à la droite $\mathcal{D}$ et à la courbe $\mathcal{C}$; soit u_n le réel défini par $u_n = \dfrac{C_nB_n}{A_nB_n}$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a : $u_n = \dfrac{2n-5-f(n)}{2n-5}$.
2. (a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

   (b) Calculer la limite de la suite (u_n). Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Correction du devoir maison N°6

Partie A

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^x + 2x - 7$.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-7 = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-7 = -\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
2. g est la somme de fonction dérivables sur $\mathbb{R}$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   $g'(x) = 2e^x + 2$

   or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, alors $g'(x) > 0$

   g est alors strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   Tableau de variation de g :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. g est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$

   g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

   donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$

   de plus $g(0,94) \simeq -4 \times 10^{-5}$ et $g(0,941) \simeq 0,007$

   donc $0,94 < \alpha < 0,941$.
4. On a alors $g(x) < 0$ sur $]-\infty; \alpha[$

   $g(x) > 0$ sur $]\alpha; +\infty[$

   $g(x) = 0$ pour $x = \alpha$.

Partie B

f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-5)(1-e^{-x})$.

1. On fait un tableau de signes pour déterminer le signe de $f(x)$.

   $1 - e^{-x} > 0 \iff e^{-x} < 1 \iff -x < 0 \iff x > 0$

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
signe de $(2x-5)$		-		-	0	$+$	
signe de $(1-e^{-x})$		-	0	$+$		$+$	
signe de $f(x)$		$+$	0	-	0	$+$	

   alors $f(x) > 0$ sur $]-\infty; 0[\cup \left]\dfrac{5}{2}; +\infty\right[$

   $f(x) < 0$ sur $\left]0; \dfrac{5}{2}\right[$ et $f(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = \dfrac{5}{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-5=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-e^{-x}=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-5=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-e^{-x}=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$f(x)=u(x)v(x)$

$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=2(1-e^{-x})+(2x-5)(e^{-x})$

$f'(x)=2-\dfrac{2}{e^x}+\dfrac{2x-5}{e^x}=\dfrac{2e^x+2x-7}{e^x}=\dfrac{g(x)}{e^x}$

or pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x>0$, $f'(x)$ est alors du signe de $g(x)$.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. (a) $f(\alpha)=(2\alpha-5)(1-e^{-\alpha})$ or $g(\alpha)=0$ c'est à dire $2e^{\alpha}+2\alpha-7=0$

d'où $e^{\alpha}=-\dfrac{2\alpha-7}{2}$ et $e^{-\alpha}=\dfrac{-2}{2\alpha-7}$

alors $f(\alpha)=(2\alpha-5)\left(1+\dfrac{2}{2\alpha-7}\right)=(2\alpha-5)\left(\dfrac{2\alpha-5}{2\alpha-7}\right)$

donc $f(\alpha)=\dfrac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$.

(b) $h:\left]-\infty;\dfrac{5}{2}\right[\longrightarrow\mathbb{R}$

$x\longmapsto\dfrac{(2x-5)^2}{2x-7}$

h est le quotient de fonctions dérivables sur $\left]-\infty;\dfrac{5}{2}\right[$ dont le dénominateur ne s'annule pas, donc h est dérivable sur $\left]-\infty;\dfrac{5}{2}\right[$.

$h(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$

$h'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}=\dfrac{4(2x-5)(2x-7)-2(2x-5)^2}{(2x-7)^2}$

$h'(x)=\dfrac{(2x-5)(8x-28-4x+10)}{(2x-7)^2}=\dfrac{(2x-5)(4x-18)}{(2x-7)^2}$.

et $(2x-5)(4x-18)$ est un trinôme du second degré dont les racines sont $\dfrac{5}{2}$ et $\dfrac{9}{2}$.

alors $h'(x)>0$ sur $\left]-\infty;\dfrac{5}{2}\right[$, donc h est strictement croissante sur $\left]-\infty;\dfrac{5}{2}\right[$

on a alors $h(0,94)<h(\alpha)<h(0,941)$ et $h(\alpha)=f(\alpha)$

d'où $-1,901<f(\alpha<-1,9$

5. $f(x)-(2x-5)=(2x-5)-(2x-5)e^{-x}-(2x-5)=(-2x+5)e^{-x}=-2xe^{-x}+5e^{-x}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x-5)=0$

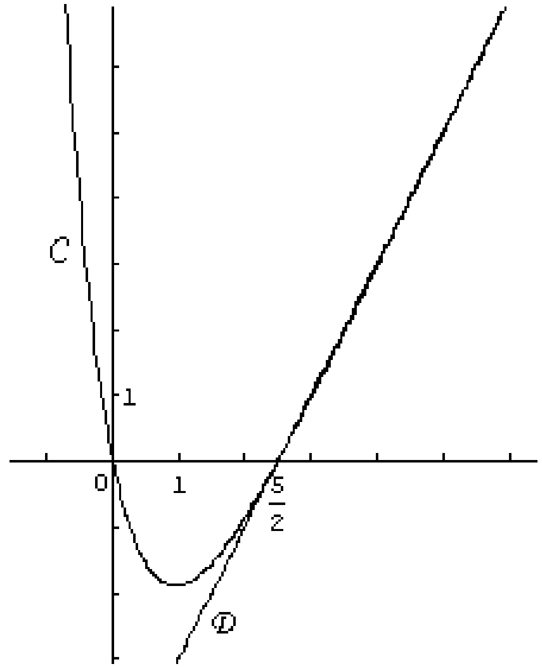
donc la droite $\mathcal{D}$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

De plus pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^{-x}>0$ et $-2x+5<0$ sur $\left]\dfrac{5}{2};+\infty\right[$

et $-2x+5>0$ sur $\left]-\infty;\dfrac{5}{2}\right[$.

alors $f(x)-(2x-5)>0$ sur $\left]-\infty;\dfrac{5}{2}\right[$ et $f(x)-(2x-5)<0$ sur $\left]\dfrac{5}{2};+\infty\right[$.

$\mathcal{C}$ est alors située au-dessus de $\mathcal{D}$ sur $\left]-\infty;\dfrac{5}{2}\right[$ et en-dessous de $\mathcal{D}$ sur $\left]\dfrac{5}{2};+\infty\right[$.



6.

Partie C

Pour $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ soit $u_n=\dfrac{C_nB_n}{A_nB_n}$.

1. $C_nB_n=|f(n)-(2n-5)|$

$=(2n-5)-f(n)$ car $n\geq 3$ et sur $\left]\dfrac{5}{2};+\infty\right[$, $\mathcal{C}$ est en-dessous de $\mathcal{D}$

$A_nB_n=|2n-5|=2n-5$ car $n\geq 3$

On a alors $u_n=\dfrac{2n-5-f(n)}{2n-5}$ pour $n\geq 3$.

2. (a) $u_n = 1 - \dfrac{f(n)}{2n-5} = 1 - (1 - e^{-n}) = e^{-n}$

$u_{n+1} = e^{-n-1} = e^{-n} \times e^{-1} = u_n \times \dfrac{1}{e}$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{e}$ et de premier terme $u_3 = e^{-3}$.

(b) Comme $-1 < \dfrac{1}{e} < 1$, la suite (u_n) est convergente et converge vers 0.

On pouvait prévoir ce résultat car la droite $\mathcal{D}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.