Classe : TS2 Pour le 16/10/2003

MATHEMATIQUES

Devoir maison N° 9

Exercice 1:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, unité graphique : 1 cm.
Soit A le point d'affixe $z_A = -i$ et B le point d'affixe $z_B = -2i$.
On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z, M distinct de A, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \dfrac{iz-2}{z+i}$.

1. Démontrer que, si z est un imaginaire pur, $z \neq -i$, alors z' est imaginaire pur.
2. Déterminer les points invariants par l'application f.
3. Calculer $|z' - i| \times |z + i|$.
   Montrer que, quand le point M décrit le cercle de centre A et de rayon 2, le point M' reste sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
4. (a) Développer $(z + i)^2$ puis factoriser $z^2 + 2iz - 2$.
   (b) Déterminer et représenter l'ensemble des points M ; tels que M' soit le symétrique de M par rapport à O.
5. Déterminer et représenter l'ensemble E des points M, tels que le module de z' soit égal à 1.
   (On pourra remarquer que $z' = \dfrac{i(z - z_B)}{z - z_A}$.)

Exercice 2:

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unité graphique : 2 cm).
Soit A le point d'affixe 4. On note d la droite d'équation $x = 4$, privée du point A.
A tout point M, différent de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z', vérifiant : $z' = \dfrac{z-4}{4-\bar{z}}$.

1. (a) Soit B le point d'affixe $1 + 3i$. Calculer l'affixe du point B' associé au point B.
   Placer les points B et B' sur une figure.
   (b) Soit x un réel différent de 4. On note R le point d'affixe x.
   Calculer l'affixe du point R' associé au point R. Placer R' sur la figure.
   (c) Soit y un nombre réel non nul. On note S le point de d d'affixe $4 + iy$.
   Calculer l'affixe du point S' associé au point S. Placer S' sur la figure.
   (d) Démontrer que : $z' = 1$ si, et seulement si, $M \in d$.
2. Soit M un point n'appartenant pas à d, différent de A.
   On se propose de déterminer une méthode de construction du point M' connaissant le point M.
   (a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de 4, $|z'| = 1$.
   (b) Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de 4 : $\dfrac{z'-1}{z-4} \in \mathbb{R}$.
   Montrer que la droite $(S'M')$ est bien définie et parallèle à la droite (AM).
   (c) Déduire des questions 2.(a) et 2.(b), une construction géométrique du point M' connaissant le point M.
   Appliquer cette méthode à la construction du point C' associé au point C d'affixe $2 + i$.

Correction du devoir maison N° 9

Exercice 1:

A est le point d'affixe $z_A = -i$ et B le point d'affixe $z_B = -2i$.

f est l'application qui à tout point $M(z)$, distinct de A, associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \dfrac{iz-2}{z+i}$.

1. z est imaginaire pur et $z \neq i$, alors $z = yi$ où $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
   et $z' = \dfrac{i(iy)-2}{iy+i} = \dfrac{-y-2}{i(y+1)} = \dfrac{y+2}{y+1}i$.
   Or $\dfrac{y+2}{y+1} \in \mathbb{R}$, donc z' est imaginaire pur.
2. On résout $z = z' \iff z = \dfrac{iz-2}{z+i} \iff z^2 + iz = iz - 2 \quad \text{et } z \neq -i \iff z^2 = -2 \quad \text{et } z \neq -i$
   $\iff z = \sqrt{2}i$ ou $z = -\sqrt{2}i$
   Donc les points invariants de f sont les points d'affixes $\sqrt{2}i$ et $-\sqrt{2}i$.
3. $|z'-i| \times |z+i| = \left|\dfrac{iz-2}{z+i} - i\right| \times |z+i| = \left|\dfrac{iz-2-iz+1}{z+i}\right| \times |z+i| = \dfrac{|-1|}{|z+i|} \times |z+i| = 1$
   M décrit le cercle de centre A, de rayon 2 signifie $AM = 2 \iff |z+i| = 2$.
   On a alors $2|z'-i| = 1 \iff |z'-i| = \dfrac{1}{2}$
   M' est alors situé sur le cercle de centre le point d'affixe i et de rayon $\dfrac{1}{2}$.
4. (a) $(z+i)^2 = z^2 + 2iz + i^2 = z^2 + 2iz - 1$
   $z^2 + 2iz - 2 = z^2 + 2iz - 1 - 1 = (z+i)^2 - 1 = (z+i-1)(z+i+1)$
   (b) On veut que M' soit le symétrique de M par rapport à O, c'est à dire $z' = -z$.
   On résout alors $-z = \dfrac{iz-2}{z+i} \iff -z^2 - iz = iz - 2 \quad \text{et } z \neq -i \iff z^2 + 2iz - 2 = 0 \quad \text{et } z \neq -i$
   $\iff (z+i-1)(z+i+1) = 0 \quad \text{et } z \neq -i \iff z = 1 - i$ et $z = -1 - i$
   Donc M' est le symétrique de M lorsque M est d'affixe $1-i$ ou $-1-i$.
5. $|z'| = \left|\dfrac{iz-2}{z+i}\right| = \left|\dfrac{i(z+2i)}{z+i}\right| = \dfrac{|i||z+2i|}{|z+i|} = \dfrac{|z+2i|}{|z+i|}$.
   Alors $|z'| = 1 \iff \dfrac{|z+2i|}{|z+i|} = 1 \iff |z+2i| = |z+i| \quad \text{et } z \neq -i \iff BM = AM \quad \text{et } M \neq A$
   $\iff M$ est sur la médiatrice de $[AB]$.

Exercice 2:

A est le point d'affixe 4, d est la droite d'équation $x = 4$ privée du point A.

A tout point M du plan, distinct de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-4}{4-\bar{z}}$.

1. (a) B est d'affixe $1+3i$.
   $\dfrac{1+3i-4}{4-\overline{1+3i}} = \dfrac{-3+3i}{4-1+3i} = \dfrac{(-3+3i)(3-3i)}{(3+3i)(3-3i)} = \dfrac{-(3-3i)^2}{3^2+3^2} = \dfrac{-9+18i+9}{18} = i.$
   Donc B' a pour affixe i.
   (b) $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 4$, R est d'affixe x
   $\dfrac{x-4}{4-\bar{x}} = \dfrac{x-4}{4-x} = -1$ donc R' est d'affixe -1.
   (c) $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, S est d'affixe $4+iy$
   $\dfrac{4+iy-4}{4-\overline{4+iy}} = \dfrac{iy}{4-4+iy} = \dfrac{iy}{iy} = 1$ donc S' est d'affixe 1.
   (d) $z' = 1 \iff \dfrac{z-4}{4-\bar{z}} = 1 \iff z - 4 = 4 - \bar{z} \quad \text{et } \bar{z} \neq 4 \iff z + \bar{z} = 8 \quad \text{et } z \neq 4$
   $\iff 2Re(z) = 8 \quad \text{et } z \neq 4 \iff Re(z) = 4 \quad \text{et } z \neq 4 \iff M \in d$
2. $M \notin d$ et $M \neq A$
   (a) Pour $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 4$, $|z'| = \left|\dfrac{z-4}{4-\bar{z}}\right| = \dfrac{|z-4|}{|4-\bar{z}|} = \dfrac{|z-4|}{|\overline{4-z}|} = \dfrac{|z-4|}{|4-z|} = \dfrac{|z-4|}{|z-4|} = 1.$

(b) Pour $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 4$, $\dfrac{z'-1}{z-4} = \dfrac{\frac{z-4}{4-\bar{z}}-1}{z-4} = \dfrac{\frac{z-4-4+\bar{z}}{4-\bar{z}}}{z-4} = \dfrac{z+\bar{z}-8}{(4-\bar{z})(z-4)} = \dfrac{2Re(z)-8}{-\overline{(z-4)}(z-4)} = \dfrac{8-2Re(z)}{|z-4|^2}$

or $Re(z) \in \mathbb{R}$ et $|z-4|^2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, donc $\dfrac{z'-1}{z-4} \in \mathbb{R}$.

On a alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 4$, $z'-1 = \dfrac{8-2Re(z)}{|z-4|^2}(z-4)$

et $z'-1$ est l'affixe de $\overrightarrow{S'M'}$, $z-4$ est l'affixe de $\overrightarrow{AM}$

on a donc $\overrightarrow{S'M'} = k\overrightarrow{AM}$ où $k = \dfrac{8-2Re(z)}{|z-4|^2}$

donc $\overrightarrow{S'M'}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires et $(S'M')$ et (AM) sont parallèles.

(c) On obtient le point M' par la translation du point S' par le vecteur $k\overrightarrow{AM}$ où $k = \dfrac{8-2Re(z)}{|z-4|^2}$

Pour $M = C$, on a $Re(z) = 2$ et $|z-4|^2 = |-2+i|^2 = 4+1 = 5$ d'où $k = \dfrac{4}{5}$

et C' est l'image de S' par la translation de vecteur $\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AC}$.