Classe : TS2 **MATHEMATIQUES** ; DM N°11 Pour le 20/01/2004

Exercice 1: **PARTIE A**

Une urne contient n boules blanches ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$), 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?
2. On note $p(n)$ la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

   (a) Montrer que $p(n) = \dfrac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$.

   (b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p(n)$. Interpréter ce résultat.

PARTIE B

Pour les questions suivantes, $n = 4$.

1. Calculer $p(4)$.
2. Un tirage consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

   Un joueur effectue deux tirages indépendants, en remettant dans l'urne avant le second tirage les deux boules tirées la première fois.

   Il mise au départ la somme de 30€. Pour chaque tirage :

   – si les deux boules sont de même couleur, il reçoit alors 40€,

   – si elles sont de couleurs différentes, il reçoit alors 5€.

   On appelle gain du joueur la différence, à l'issue des deux tirages, entre la somme reçue par le joueur et sa mise initiale (ce gain peut être positif ou négatif).

   On désigne par X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

   (a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

   (b) Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance de X.

Exercice 2:

z et z' sont deux nombres complexes et on pose : $\varphi(z, z') = z\overline{z'} + \overline{z}z'$.

$\overline{z}$ et $\overline{z'}$ désignent les conjugués respectifs de z et z'. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (unité graphique : 2 cm).

1. Calculer : $\varphi(i, 3)$; $\varphi(1+2i, -2+i)$; $\varphi(2+i; -3+2i)$; $\varphi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i; -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

   Montrer que pour tout couple (z, z'), le nombre $\varphi(z, z')$ est réel.
2. (a) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$; x, y, x', y' réels.

   Calculer $\varphi(z, z')$ en fonction de x, y, x', y'.

   (b) Déterminer l'ensemble (D) des points M d'affixe z tels que $\varphi(z, 1+i) = 2\sqrt{2}$.

   Dessiner (D) dans le repère $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
3. Déterminer l'ensemble (C) des points M d'affixe z tels que $\varphi(z, z) = 2$.

   Dessiner (C) dans le repère $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Que peut-on dire de la position relative de (C) et (D) ?

Correction du devoir maison N°11

Exercice 1:

PARTIE A

1. Le nombre de possibilités de tirer deux boules est :

   $$\binom{n+8}{2} = \frac{(n+8)!}{2!(n+6)!} = \frac{(n+8)(n+7)}{2}$$

   Le nombre de possibilités de tirer deux boules blanches est :

   $$\binom{n}{2} = \frac{(n)!}{2!(n-2)!} = \frac{(n)(n-1)}{2}$$

   La probabilité de tirer deux boules blanches est alors $\dfrac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n+8)(n+7)}{2}} = \dfrac{n^2 - n}{(n+8)(n+7)}$.

2. (a) Le nombre de possibilités de tirer deux boules rouges est $\binom{5}{2} = 10$

   Le nombre de possibilités de tirer deux boules vertes est $\binom{3}{2} = 3$

   La probabilité de tirer deux boules rouges est alors :

   $\dfrac{10}{\frac{(n+8)(n+7)}{2}} = \dfrac{20}{(n+8)(n+7)}$ et la probabilité de tirer deux boules vertes est : $\dfrac{3}{\frac{(n+8)(n+7)}{2}} = \dfrac{6}{(n+8)(n+7)}$

   On a alors : $p(n) = \dfrac{n^2 - n}{(n+8)(n+7)} + \dfrac{20}{(n+8)(n+7)} + \dfrac{6}{(n+8)(n+7)}$

   $p(n) = \dfrac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$.

   (b) $\dfrac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)} = \dfrac{n^2\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{26}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{8}{n}\right)\left(1 + \frac{7}{n}\right)} = \dfrac{1 - \frac{1}{n} + \frac{26}{n^2}}{\left(1 + \frac{8}{n}\right)\left(1 + \frac{7}{n}\right)}$.

   On a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)} = 1$. En conclusion, quand le nombre de boules blanches devient très important, on est presque sûr qu'on en tirera deux.

PARTIE B

1. $p(4) = \dfrac{4^2 - 4 + 26}{(4+8)(4+7)} = \dfrac{38}{132} = \dfrac{19}{66}$.
2. X peut prendre les valeurs 50 (lorsque lors des deux tirages il obtient deux boules de la même couleur), 15 (lorsqu'à un seul des deux tirages, il obtient deux boules de la même couleur), -20 (lorsque lors des deux tirages, il obtient deux boules de couleurs différentes).

   $P(X = 50) = (p(4))^2 = \dfrac{361}{4356}$ $\quad P(X = -20) = (1 - p(4))^2 = \dfrac{2209}{4356}$

   $P(X = 15) = 1 - \dfrac{361}{4356} - \dfrac{2209}{4356} = \dfrac{1786}{4356} = \dfrac{893}{2178}$

   Loi de X :

X	50	15	-20
probabilités	$\dfrac{361}{4356}$	$\dfrac{1786}{4356}$	$\dfrac{2209}{4356}$

   $E(X) = 50 \times \dfrac{361}{4356} + 15 \times \dfrac{1786}{4356} - 20 \times \dfrac{2209}{4356} = \dfrac{660}{4356} = \dfrac{5}{33}$.

<u>Exercice 2:</u>

z et z' sont deux nombres complexes ; $\varphi(z; z') = z\overline{z'} + \overline{z}z'$.

1. $\varphi(i; 3) = i \times 3 + (-i) \times 3 = 0$

   $\varphi(1+2i; -2+i) = (1+2i)(-2-i) + (1-2i)(-2+i) = -2-4i-i+2-2+i+4i+2$

   $\varphi(1+2i; -2+i) = 0$

   $\varphi(2+i; -3+2i) = (2+i)(-3-2i) + (2-i)(-3+2i)$

   $\varphi(2+i; -3+2i) = -6 - 4i - 3i + 2 - 6 + 4i + 3i + 2 = -8$

   $\varphi(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

   $\varphi(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i - \frac{1}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i - \frac{1}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$

   Soient z et z' complexes.

   $\overline{\varphi(z; z')} = \overline{z\overline{z'} + \overline{z}z'} = \overline{z}\overline{\overline{z'}} + \overline{\overline{z}}\overline{z'} = \overline{z}z' + z\overline{z'} = \varphi(z; z')$, donc $\varphi(z; z')$ est réel.
2. (a) On pose $z = x + iy$, alors $\overline{z} = x - iy$ et $z' = x' + iy'$, alors $\overline{z'} = x' - iy'$

   On a alors $\varphi(z; z') = z\overline{z'} + \overline{z}z' = (x+iy)(x'-iy') + (x-iy)(x'+iy')$

   $\varphi(z; z') = xx' - ixy' + iyx' + yy' + xx' + ixy' - ix'y + yy' = 2(xx' + yy')$.

   (b) On cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi(z; 1+i) = 2\sqrt{2}$ où $z = x + iy$

   $\iff 2(x+y) = 2\sqrt{2} \iff x + y = \sqrt{2} \iff y = -x + \sqrt{2}$

   Donc l'ensemble des complexes z tels que $\varphi(z; 1+i) = 2\sqrt{2}$ est la droite d'équation $y = -x + \sqrt{2}$.
3. On cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi(z; z) = 2$

   or $\varphi(z; z) = z\bar{z} + \bar{z}z = |z|^2 + |z|^2 = 2|z|^2$

   alors $\varphi(z; z) = 2 \iff |z|^2 = 1 \iff |z| = 1$

   donc l'ensemble des complexes z tels que $\varphi(z; z) = 2$ est le cercle de centre 0 et de rayon 1.

   Pour déterminer la position relative de (C) et de (D), on détermine la distance entre O et (D).

   Soit H le point de (D) tel que $OH = d(O; (D))$, on a alors (OH) perpendiculaire à (D)

   On pose $z_H = x_H + iy_H$ l'affixe du point H. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OH}$ sont $\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix}$. Les coordonnées d'un vecteur normal à la droite (D) d'équation $y = -x + \sqrt{2}$ ou $y + x - \sqrt{2} = 0$ est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   On a alors $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{n}$ colinéaires, c'est à dire $\overrightarrow{OH} = k\overrightarrow{n}$ où $k \in \mathbb{R}$, ce qui donne :

   $\begin{cases} x_H = k \\ y_H = k \end{cases}$ or $H \in (D)$ signifie $y_H = x_H + \sqrt{2}$

   $\iff \begin{cases} x_H = k \\ -x_H + \sqrt{2} = k \end{cases}$ d'où $2k = \sqrt{2}$ et $k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   Donc $\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ et $||\overrightarrow{OH}|| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$, c'est à dire le rayon de (C)

   Donc la droite (D) est tangente à (C) en H d'affixe $z_H = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.