

Exercice 1:

On sait que 35% des individus d'une population lycéenne pratique le cyclisme (sport A), que 25% des individus pratiquent le tennis (sport B) et que 15% pratiquent les sports A et B.

1. On interroge au hasard une personne de la population considérée.
 - (a) Quelle est la probabilité que cette personne pratique au moins un des sports considérés ?
 - (b) Quelle est la probabilité que cette personne ne pratique aucun des sports considérés ?
 - (c) Quelle est la probabilité que cette personne pratique le sport A et ne pratique pas le sport B ?
 - (d) Quelle est la probabilité que cette personne pratique un et un seul des sports considérés ?
2. On interroge au hasard une personne de la population considérée pratiquant le sport A. Quelle est la probabilité pour que cette personne pratique le sport B ? (*On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.*)

Exercice 2:

Un livreur de pizzas doit servir un client qui se trouve à 6 km et qui exige d'être servi à 20 h 00 précisément.

Pour se déplacer, il utilise un scooter qui roule constamment à 36 km/h (on néglige les phases d'accélération et de décélération). Sur son trajet, il va rencontrer deux feux tricolores non synchronisés et indépendants.

S'il arrive à un feu orange, il s'arrête 60 secondes et il repart.

S'il arrive à un feu rouge, il s'arrête 30 secondes et il repart.

Pour chaque feu :

- la probabilité d'être vert à l'arrivée du livreur est $\frac{1}{2}$;
- la probabilité d'être orange à l'arrivée du livreur est $\frac{1}{4}$.

X est la variable aléatoire « temps en minutes mis par le livreur pour arriver à destination ».

1. (a) Calculer, en justifiant le calcul, la probabilité $P(X = 11)$.
(b) Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer l'espérance mathématique de X .
3. Le livreur part à 19 h 49.

- (a) Quelle est la probabilité pour que le livreur arrive en retard ?
- (b) Quelle est la probabilité pour que le livreur arrive en avance ?

Exercice 3:

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher. L'urne U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires (n est un entier naturel supérieur ou égal à 1).

L'urne U_2 contient 2 boules blanches et une boule noire.

On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2 , puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1 ; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve. Pour $i = 1$ et $i = 2$, on considère l'événement B_i : « On a tiré une boule blanche dans l'urne U_i ».

1. On considère l'événement A : « Après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ ».
 - (a) Montrer que la probabilité $P(A)$ de l'événement A peut s'écrire :

$$P(A) = \frac{3}{4} \left(\frac{n+2}{n+3} \right).$$
 - (b) Déterminer la limite de $P(A)$ quand n tend vers $+\infty$.
2. On considère l'événement B : « Après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche ».

Vérifier que la probabilité $P(B)$ de l'événement B peut s'écrire :

$$P(B) = \frac{6}{4(n+3)}.$$
3. Un joueur mise 20 euros et effectue une épreuve. A l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches contenues dans l'urne U_2 .
 - si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit $2n$ euros.
 - Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n euros.
 - Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

- (a) Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10.
Dans la suite, on considère $n > 10$ et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeur le gain algébrique du joueur (par exemple, si après l'épreuve, l'urne U_2 contient une boule blanche, $X = 2n - 20$).
- (b) Déterminer la loi de probabilité de X .
- (c) Calculer l'espérance de X .
- (d) On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance est strictement positive.

Montrer qu'il est ainsi dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches.

Correction du devoir maison 10

Exercice 1:

On note A l'événement : « la personne pratique le cyclisme » ;

B l'événement : « la personne pratique le tennis ».

1. (a) On cherche $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{35}{100} + \frac{25}{100} - \frac{15}{100} = 0,45.$$

- (b) on cherche $P(\overline{A \cup B})$

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,45 = 0,55.$$

- (c) on cherche $P(A \cap \bar{B})$

$$\begin{aligned} P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - P(A \cap B) \quad \text{d'après la formule des probabilités totales} \\ &= \frac{35}{100} - \frac{15}{100} = 0,2. \end{aligned}$$

- (d) on cherche $P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \quad \text{d'après la formule des probabilités totales} \\ &= \frac{25}{100} - \frac{15}{100} = 0,1 \end{aligned}$$

d'où $P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = 0,2 + 0,1 = 0,3$.

2. On cherche $P_A(B)$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,15}{0,35} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}.$$

Exercice 2:

1. (a) Pour parcourir la distance, si les deux feux sont verts, il met $60 \times \frac{6}{36} = 10$ minutes.

On a alors $X = 11$ lorsque :

- le premier feu est orange et le second est vert
- les deux feux sont rouges
- le premier feu est vert et le second est orange

Pour $i = 1$ et $i = 2$, on note O_i : « le $i^{\text{ème}}$ feu est orange »

R_i : « le $i^{\text{ème}}$ feu est rouge »

V_i : « le $i^{\text{ème}}$ feu est vert ».

$$\begin{aligned} P(X = 11) &= P(O_1 \cap V_2) + P(R_1 \cap R_2) + P(O_2 \cap V_1) \\ &= P(O_1)P(V_2) + P(R_1)P(R_2) + P(O_2)P(V_1) \end{aligned}$$

car on a des événements indépendants

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$$

- (b) si les deux feux sont verts, $X = 10$

si l'un des feux est vert et l'autre est rouge, $X = 10,5$

si l'un des feux est orange et l'autre est rouge, $X = 11,5$

si les deux feux sont oranges, $X = 12$

$$\text{alors } P(X = 10) = P(V_1 \cap V_2) = P(V_1)P(V_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} P(X = 10,5) &= P(V_1 \cap R_2) + P(V_2 \cap R_1) \\ &= P(V_1)P(R_2) + P(V_2)P(R_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 11,5) &= P(O_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap O_2) \\ &= P(O_1)P(R_2) + P(R_1)P(O_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$P(X = 12) = P(O_1 \cap O_2) = P(O_1)P(O_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

loi de X

X	10	10,5	11	11,5	12
probabilités	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

$$2. E(X) = 10 \times \frac{1}{4} + 10,5 \times \frac{1}{4} + 11 \times \frac{5}{16} + 11,5 \times \frac{1}{8} + 12 \times \frac{1}{16} = \frac{172}{16} = \frac{43}{4}$$

$$3. (a) \text{ la probabilité qu'il arrive en retard est } P(X > 11) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

$$(b) \text{ la probabilité qu'il arrive en avance est } P(X < 11) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Exercice 3:

1. (a) l'événement A correspond à l'événement : « on tire une boule de la même couleur dans U_1 et U_2 ».

d'où $P(A) = P(B_1 \cap B_2) + P(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2)$

$$= P_{B_1}(B_2) \times P(B_1) + P_{\bar{B}_1}(\bar{B}_2) \times P(\bar{B}_1)$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{n}{n+3} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{n+3} = \frac{3n+6}{4(n+3)} = \frac{3}{4} \left(\frac{n+2}{n+3} \right)$$

$$(b) \frac{n+2}{n+3} = \frac{n(1+\frac{2}{n})}{n(1+\frac{3}{n})} = \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}} \quad \text{d'où} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n+3} = 1$$

$$\text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A) = \frac{3}{4}.$$

2. l'événement B correspond à : « on tire une boule noire dans U_1 et une boule blanche dans U_2 ».

$$\text{alors } P(B) = P(\bar{B}_1 \cap B_2) = P_{\bar{B}_1}(B_2) \times P(\bar{B}_1) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{n+3} = \frac{6}{4(n+3)}$$

3. (a) Le joueur reçoit au maximum $2n$ euros, si $n \leq 10$, $2n \leq 20$, il ne peut donc pas recevoir plus qu'il n'a misé, c'est pourquoi dans ce cas, il n'a aucun intérêt à jouer.

(b) X prend les valeurs $2n - 20$; $n - 20$ ou -20 .

$$P(X = 2n - 20) = P(B) \quad , \quad P(X = n - 20) = P(A)$$

$$\begin{aligned} \text{et } P(X = -20) &= 1 - P(B) - P(A) = 1 - \frac{3(n+2)}{4(n+3)} - \frac{6}{4(n+3)} \\ &= \frac{4n + 12 - 3n - 12}{4(n+3)} = \frac{n}{4(n+3)} \end{aligned}$$

loi de X :

X	$2n - 20$	$n - 20$	-20
probabilités	$\frac{6}{4(n+3)}$	$\frac{3}{4} \left(\frac{n+2}{n+3} \right)$	$\frac{n}{4(n+3)}$

$$(c) E(X) = (2n - 20) \times \frac{6}{4(n+3)} + (n - 20) \times \frac{3}{4} \left(\frac{n+2}{n+3} \right) - \frac{20n}{4(n+3)}$$

$$E(X) = \frac{12n - 120 + 3n^2 - 54n - 120 - 20n}{4(n+3)} = \frac{3n^2 - 62n - 240}{4(n+3)}$$

(d) $E(X) > 0$ lorsque $3n^2 - 62n - 240 > 0$

$$\Delta = 62^2 + 4 \times 3 \times 240 = 6724 = 82^2$$

$$\text{les racines du trinôme sont : } n_1 = \frac{62 - 82}{6} = -\frac{10}{3} \text{ et } n_2 = \frac{62 + 82}{6} = 24$$

donc $3n^2 - 62n - 240 > 0$ lorsque $n > 24$

et le jeu est favorable au joueur lorsque l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches.