Classe : TS2 **MATHEMATIQUES** Le 21/01/2004

Interrogation

Exercice 1:

Répondre au QCM proposé **en justifiant dans chaque cas**. Pour chaque question, une seule réponse est exacte.

1. On dispose de dix jetons numérotés de 1 à 10 et on en extrait simultanément trois pour former un « paquet ». Combien de « paquets » contenant au moins un jeton ayant un numéro pair peut-on ainsi former ?

Réponse 1	*Réponse 2*	*Réponse 3*
180	330	110

2. A et B sont deux événements d'un espace probabilisé tels que :
$p(A) = 0,4$; $p(B) = 0,5$; $p(\overline{A \cup B}) = 0,35$. Combien vaut $p(A \cap B)$?

Réponse 1	*Réponse 2*	*Réponse 3*
$p(A \cap B) = 0,1$	$p(A \cap B) = 0,25$	Les données sont insuffisantes pour répondre

3. A et B sont deux événements d'un espace probabilisé tels que : $p(B \cap A) = \frac{1}{6}$; $p_A(B) = \frac{1}{4}$ (probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé).

Combien vaut $p(A)$?

Réponse 1	*Réponse 2*	*Réponse 3*
$p(A) = \frac{2}{3}$	$p(A) = \frac{1}{24}$	$p(A) = \frac{1}{12}$

4. Une variable aléatoire X a pour loi de probabilité :

x_i	1	2	4
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Combien vaut l'écart type de X ?

Réponse 1	*Réponse 2*	*Réponse 3*
$\sigma = \frac{3}{2}$	$\sigma = \sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sigma = 2$

Exercice 2:

L'équipe de basket du lycée doit disputer un tournoi. Huit élèves ont été sélectionnés pour cette occasion, parmi lesquels figure Jean.

1. Pour un match, l'entraineur choisit au hasard cinq joueurs parmi les huit sélectionnés. On appellera « cinq » cet ensemble de cinq joueurs.
   (a) Combien l'entraîneur peut-il former de « cinq » ?
   (b) Démontrer que la probabilité p que Jean fasse partie du « cinq » formé est $\frac{5}{8}$.

2. Durant le tournoi, l'équipe doit affronter quatre autres équipes. Pour chacun de ces matchs, l'entraîneur constitue un « cinq » de manière aléatoire.
   Calculer la probabilité que Jean dispute :
   (a) zéro match ;
   (b) exactement un match ;
   (c) exactement deux matchs ;
   (d) au moins trois matchs.

   On donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-3} près par défaut.

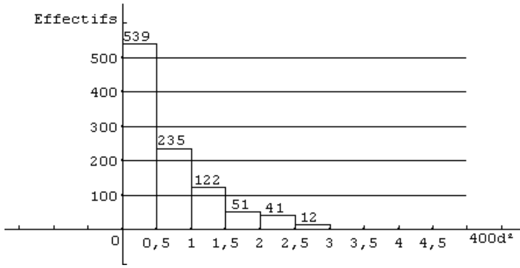
Exercice 3:

Un pisciculteur possède un bassin qui contient 3 variétés de truites : : communes, saumonées et arc-en-ciel. Il voudrait savoir s'il peut considérer que son bassin contient autant de truites de chaque variété. Pour cela il effectue, au hasard, 400 prélèvements d'une truite avec remise et obtient les résultats suivants :

Variétés	Commune	Saumonée	Arc-en-ciel
Effectifs	146	118	136

1. (a) Calculer les fréquences de prélèvement f_c d'une truite commune, f_s d'une truite saumonée et f_a d'une truite arc-en-ciel. On donnera les valeurs décimales exactes.
   (b) On pose $d^2 = \left(f_c - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(f_s - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(f_a - \frac{1}{3}\right)^2$.
   Calculer $400d^2$ arrondi à 10^{-2} ; on note $400d^2_{obs}$ cette valeur.

2. A l'aide d'un ordinateur, le pisciculteur simule le prélèvement au hasard de 400 truites suivant la loi équirépartie. Il répète 1000 fois cette opération et calcule à chaque fois la valeur de $400d^2$. Le diagramme à bandes ci-contre représente la série des 1000 valeurs de $400d^2$, obtenues par simulation.



   Déterminer une valeur approchée à 0,5 près par défaut, du neuvième décile $D9$ de cette série.

3. En argumentant soigneusement la réponse dire si on peut affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 10% que « le bassin contient autant de truites de chaque variété ».

Correction de l'interrogation :

Exercice 1:

1. Le nombre de paquets possibles est $\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120$

   nombre de paquets ne contenant aucun numéro pair : $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{5!}{3!2!} = 10$

   donc le nombre de paquets contenant au moins un jeton ayant un numéro pair est 110

   Réponse 3

2. On sait que $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

   et $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0,35 = 0,65$

   donc $P(A \cap B) = 0,4 + 0,5 - 0,65 = 0,25$

   Réponse 2

3. $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, et on a $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$,

   donc $P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P_A(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

   Réponse 1

4. $E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2.$

   $Var(X) = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{4} - (E(X))^2 = \frac{1}{2} + 1 + 4 - 4 = \frac{3}{2}$,

   donc $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

   Réponse 2

Exercice 2:

1. (a) nombre de « cinq » qu'il peut former : $\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56$

   (b) nombre de « cinq » formés avec Jean : $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35$

   donc $p = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}$

2. On est en présence d'un schéma de Bernoulli,

   X suit alors la loi binomiale $\mathcal{B}\left(4, \frac{5}{5}\right)$

   (a) $P(X = 0) = \left(1 - \frac{5}{8}\right)^4 = \frac{3^4}{8^4} = \frac{81}{4096} \simeq 0,02$

   (b) $P(X = 1) = 4 \times \frac{5}{8} \times \left(1 - \frac{5}{8}\right)^3 = \frac{4 \times 5 \times 3^3}{8^4} = \frac{540}{4096} \simeq 0,132$

   (c) $P(X = 2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \left(\frac{5}{8}\right)^2 \left(1 - \frac{5}{8}\right)^2 = \frac{4!}{2!2!} \times \frac{225}{4096} = \frac{1350}{4096} \simeq 0,33$

   (d) $P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) \simeq 0,518$

Exercice 3:

1. (a) $f_c = \frac{146}{400} \simeq 0,365$ $\quad f_s = \frac{118}{400} = 0,295$ $\quad f_a = \frac{136}{400} = 0,34$

   (b) $400d^2_{\text{obs}} \simeq 1,01$

2. Une valeur approchée à 0,5 près par défaut du $9^{\text{ème}}$ décile est 1,5.

3. On a $1,01 < D_9$, donc on conserve l'hypothèse que le bassin contient autant de truites de chaque variété.